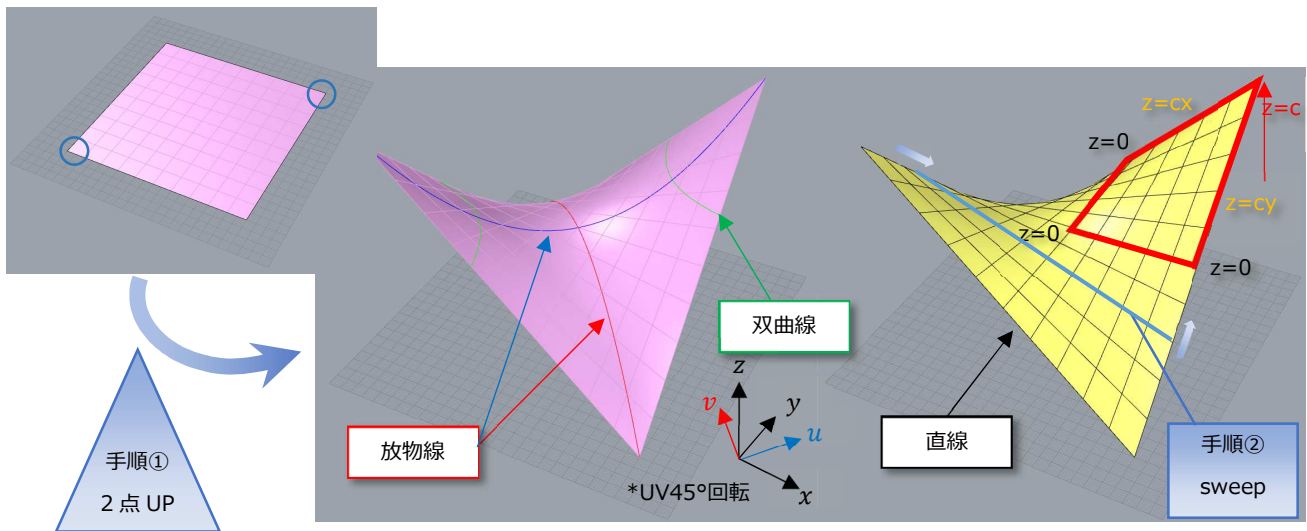


構造センス育成講座 幾何学編 第4回 「直線で構成された曲面（その2）」

今回は、有名な曲面形状の一つとして挙げられる HP シェルについて取り上げます。



[図1] HP シェルと断面線

HP シェルとは、hyperbolic paraboloidal shell の略語で、日本語では双曲放物線面シェルと呼ばれます。双曲放物面という言葉は馴染みがないかもしれませんが、図を見てみるとシェルの垂直断面が放物線であり、水平断面が双曲線であることから、その名の通りであることが分かります。

HP シェルは、その語源とは異なり、直線で構成される曲面としても知られています。

作り方は以下の通りです。

手順①：平面上に正方形（またはひし形）を描き、対角の節点を上下に移動させて枠を作ります。

手順②：一辺を残りの二辺に沿ってスイープさせると、HP シェルが形成されます。

この曲面は四辺が対称な直線で構成され、内部を直線で結ぶことが可能です。このような直線で構成される曲面を線織面と呼びます。

曲面の特徴は、曲面を構成する数式から紐解くことができます。

手順②で取り上げた図より、赤枠で囲まれた範囲に着目します。この四辺形は四隅の内、一か所のみ $z=c$ になっており、向かい合う二辺は $z=0$ ($y=0$ のとき)、 $z=cx$ ($y=1$ のとき) となります。これらを線形補間すると一般式

$$z = cxy \quad [\text{式 1}]$$

が導出されます。 $c=0$ のとき、この式は平面を表します。

次に[式 1]を 45 度回転させてみます。新しい座標系を $u=(x+y)/\sqrt{2}$, $v=(-x+y)/\sqrt{2}$ と定義します。これを逆に解くと、 $x=(u-v)/\sqrt{2}$, $y=(u+v)/\sqrt{2}$ と表せます。これらを $z=cxy$ に代入すると、

$$z = c/2 \cdot (u^2 - v^2) \quad [\text{式 2}]$$

が求まります。この式は別の一般式

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad [\text{式 3}]$$

で定数 $c/2=1/a^2=1/b^2$ が成り立つ場合の式と一致します。これらの式に値を代入して断面線を確認します。

[式 1]で $x=d$ または $y=d$ (d は 0 以外の定数)の場合、直線が得られます。

[式 2]で $u=0$ または $v=0$ の場合、放物線が得られます。

[式 1],[式 2]で $z=d$ (d は 0 以外の定数)の場合、双曲線が得られます。